МАТЕМАТИКА
јуни, 2009
КОМПЛЕТЕН КЛУЧ

Одговори и решенија на задачите во
НАПРЕДНО НИВО

Бр. На зад. Во тестот	Точна алтернатива	Максимален број бодови
1	В	1
2	Б	1
3	А	1
4	Б	1
5	А	1
6	В	1
7	Г	1
8	А	1
9	Б	1
10	Б	1
11	В	1
12	Г	1
13	А	1
14	Г	1
15	А	1
16	Б	1
17	Б	1
18	В	1
19	Г	1
20	А	1
21	Г	1
22	Б	1
23	В	1
24	Г	1
25	Г	1
26	А	1
27	А	1

Кратки одговори		
28	А) $3x(1-3x)(1+3x)$ Б) $(c-1)(x-3)$	**1** **1**
29	А) $(-3,0)$ Б) опаѓа	**1** **1**
30	А. 8 Б. $-\frac{1}{4}$	**1** **1**
31	А) $T(1,3)$ Б) $x=1$	**1** **1**
32	А. $1080\,cm^2$ Б. $2\,cm$	**1** **1**
33	А) 4 cm, 7 cm, 7 cm. Б) 5,5 cm, 5,5 cm, 7 cm;	**1** **1**
34	А) 2 cm Б) V= $16\pi\, cm^3$	**1** **1**
35	А. $T=\pi$ Б. $x=\frac{\pi}{8}$	**1** **1**
36	А. 1 Б. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1** **1**
37	А) I или II квадрант Б) $ctg10°$	**1** **1**
38	А) $d=\frac{\lvert 3\cdot 0+0-6\rvert}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$ В) $k=\frac{1}{3}$	**1** **1**

39	А) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ В) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	**1** **1**
40	А) C(2, -1), Б) r = 5	**1** **1**
41	А) $x = a$ Б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (или $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$)	**1** **1**
42	$\binom{11}{5} = C_{11}^{5} = 462$	**1**

СО ЦЕЛОСНО РЕШЕНИЕ

43. Вкупно: 3+2 бода

А. 3 бода

Прв начин чекори во решението	**Втор начин** чекори во решението	**Трет начин** чекори во решението	бодови
ја запишува формулата за минимум на параболата $\frac{4ac-b^2}{4a}=-2$	$y' = 2x-2$ $2x-2=0$ $x=1$	ја сведува функцијата во облик $f(x)=(x-1)^2+m-3$	**1**
ја запишува формулата за дадената функција $\frac{4(m-2)-(-2)^2}{4}=-2$, $\frac{4m-12}{4}=-2$	$y'' = 2$ $y'' = 2>0$ Воочува минимум	Воочува дека за x=1 функцијата $f(x)=(x-1)^2+m-3$ има минимум	**1**
ја наоѓа вредноста за m $m=1$	ја наоѓа вредноста за m $m=1$	$m-3=-2, \quad m=1$	**1**

Б. 2 бода

чекори во решението	Бодови
Го запишува условот за $f(x)>0$, за секој $x \in R$: $D<0$, односно $b^2-4ac<0$	**1**
$(-2)^2-4(m-2)<0$ $-4m+12<0$ $m>3$, $m\in(3,+\infty)$	**1**

44. Вкупно: 4 бода

чекори во решението	Бодови
Воочува дека поткорениот израз треба да го здоволува неравенството $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\geq 0$ и $x\neq 0,\ x\neq -1$	1
го запишува неаравенствотово вид $\frac{1}{x(x+1)}\geq 0$ и заклучува дека тоа е еквивалентно со $x(x+1)>0$	1

Го решава последното неравенство $\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ x+1<0 \end{cases}$	1
го добива решението $D_f=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$	1

ЗАБЕЛЕШКА -третиот бод го добива и за користење на билокоја друга постапка која води до решението.

45. Вкупно: 4 бода

чекори во решението	**Бодови**
ја запишува равенката во вид $\left(\frac{25}{100}\right)^{\frac{x(x-3)}{2}}=2^{x-3}$	1
ја средува равенката во вид $2^{-x^2+3x}=2^{x-3}$	1
$x^2-2x-3=0$	1
ги наоѓа решенијата на равенката $x_1=3, \quad x_2=-1$	1

46. Вкупно: 4 бода

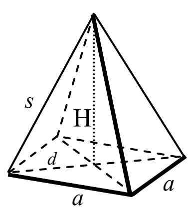
Прв начин чекори во решението	**Втор начин** чекори во решението	**бодови**
Запишува коњугиран број за комплексен број $z=x+yi$ $\bar{z}=x-yi$ и го заменува во дадениот израз: $(2+3i)\cdot(x-yi)=11-16i$	$\bar{z}=\frac{11-16i}{2+3i}$	1
ги множи броевите на левата страна и го средува изразот во вид $(2x+3y)+(3x-2y)i=11-16i$	$\bar{z}=\frac{11-16i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$	1

користи услов за еднаквост на два комплексни броја и добива систем: $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 3x-2y=-16 \end{cases}$	$\bar{z}=-2-5i$	1
Го решава горниот систем, добива решение: $x=-2, \quad y=5$ и го запишува комплексниот број $z=-2+5i$	$z=-2+5i$	1

47. Вкупно: 3 бода

чекори во решението	**бодови**
ги воочува податоците $H=10m, \ r=0{,}5m, \ R=0{,}8m$	1
ја запишува формулата за волуменот на бочниот зид на бунарот $V=\pi H\left(R^2-r^2\right)$	1
пресметува: $V=3{,}9\pi\, m^3 \approx 12{,}246\, m^3$ **Бодот се добива и за незаменета вредност за π**	1

48. Вкупно: 5 бода

чекори во решението	**бодови**
	
го изразува бочниот раб со a: $s=d=a\sqrt{2}$.	1
. $h^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ или $h^2=H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	1

Одредува апотема h . $$h = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$	1
Запишува формула за плоштина $P = B + M$ или $P = a^2 + 2ah$	1
Одредува плоштина: $P = a^2(1+\sqrt{7})$	1

49. Вкупно: 5 бода

чекори во решението	**бодови**
го степенува изразот $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ со 2: $(\sin a + \cos a)^2 = (\sqrt{2})^2$ $\sin^2 a + 2\sin a \cos a + \cos^2 a = 2$	1
го користи основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ја добива равенката $2\sin a \cos a + 1 = 2$	1
одредува $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$	1
го степенува изразот $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ со 2 $(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 = 1$ $\sin^4 a + 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a = 1$	1
го користи равенството $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$ и добива $\sin^4 a + \cos^4 a = \frac{1}{2}$	1

ЗАБЕЛЕШКА - во оваа задача може да се јават и други постапки за решавање, истите детално да се разгледаат.

50 вкупно 5 бода

А) 2 бода

чекори во решението	**бодови**
ги наоѓа коефициентите на правецот на страните AB и AC $k_{AB} = -2, \quad k_{BC} = 2$	1
заменува во формулата за агол меѓу 2 прави $tg\angle BAC = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-2-2}{1-4} = \frac{4}{3}$ или $tg\angle BAC = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{2+2}{1-4} = -\frac{4}{3}$	1

Б. 3 бода

чекори во решението	**бодови**
го наоѓа коефициентот на правата AB $k_{AB} = -2$ и коефициентот на симетралата на AB $k_s = \frac{1}{2}$	1
ги наоѓа координатите на средишната точка на C_1 на страната AB $C_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	1
запишува равенка на права низ точката C_1 со коефициент на правац $k_s = \frac{1}{2}$ $2x - 4y + 3 = 0$ (или во друг вид)	1

51. Вкупно: 4 бода

чекори во решението	**бодови**
Ги одредува веројатностите: - на броевите од 1 до 100 што се деливи со 3: $P_3 = \frac{33}{100} = 0{,}33$	1

- на броевите од 1 до 100 што се деливи со 4: $P_4 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	1
- на броевите од 1 до 100 што се деливи со 3 и 4: $P_{3,4} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} = 0{,}08$	1
ја запишува бараната веројатност : $P = P_3 + P_4 - P_{3,4}$ и ја пресметува $P = \frac{1}{2} = 0{,}5$	1

ЗАБЕЛЕШКА -решение од типот $\frac{33}{100} + \frac{25}{100} - \frac{8}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ се бодува само со 2 бода.

52. Вкупно: 5 бода

а) 2 бода

чекори во решението	**бодови**
$f(x) = x^3 \cdot \ln x$ $f'(x) = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)'$	1
$f'(x) = (3x^2) \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$ или $f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$	1

Б) 3 бода

чекори во решението	**бодови**
со замена на изразот за $f'(x)$ во равенката $f'(x) = \frac{2}{x} \cdot f(x)$ **ја** добива равенката $x^2(\ln x + 1) = 0$	1
воочува дека $x = 0$ не е решение, бидејќи $0 \notin D_f$ и	1
добива решение $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$	1